

Haos u kretanju asteroida u Sunčevom sistemu

Zlatko Papić ¹

Matematička gimnazija, Beograd

2000 Maj

¹Mumanska 4, 11160 Beograd, tel. 3406476, 426015, E-mail: papicz@EUnet.yu

APSTRAKT

Ovde je predstavljen jedan aspekt haosa u prirodi koji se odnosi na dinamiku planetarnih sistema i kretanje malih tela u njima. Usled analitičke neresivosti datog problema i poteškoća koje se u tom prilazu javljaju (poglavlje 1), izvršena je numerička integracija orbite 10 asteroida u intervalu od 10 miliona godina i rezultati predstavljeni, zajedno sa nekim mogućim uzrocima haosa koji je pri tome uočen, kao i uloga i značaj sopstvenih elemenata malih planeta (poglavlje 2). Na kraju (poglavlje 3), navedene su i neke od primena haosa u nebeskoj mehanici (ocena starosti asteroidnih familija, dinamika potencijalno opasnih asteroida, transport kosmičkog materijala, meteorita i asteroida, do Zemlje).

1 Uvod: o problemu N tela

U ovom poglavlju će biti ukratko predstavljene jednačine problema N tela, njihova poznata rešenja, kao i metode pomoću kojih se do nepoznatih rešenja teorijski i praktično (do na određenu, zadatu, tačnost) može doći.

Neka se sistem N tela sastoji od materijalnih tačaka masa m_i i radijus-vektora $\mathbf{r}_i$, gde je $i = 1, 2, \dots, n$, i $\mathbf{r}_i$ su izraženi u odnosu na inercijalni referentni sistem. Neka je

$$r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|, \quad (r_{ij} = r_{ji}),$$

tada je jednačina kretanja tela m_i

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\gamma m_i \sum_{j=1}^n m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}. \quad (1)$$

Sumiranje isključuje slučaj $j = i$, što bi proizvelo neodređenost razlomka, te ovo ubuduće neće biti naglašavano. Ovaj sistem diferencijalnih jednačina je nemoguće rešiti u konačnoj formi jer je potrebno poznavati $6n$ skalarnih integrala, od čega je, u stvarnosti, moguće odrediti 10.

Ako se saberu sve jednačine oblika (1), svi članovi na desnoj strani će se skratiti, i imaćemo

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0.$$

Ovo se može odjednom integraliti, pri čemu se dobija

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad (2)$$

gde su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ konstantni vektori. Relacija (2) znači da se centar mase sistema kreće, u odnosu na (inercijalni) referentni sistem, pravolinijski i konstantnom brzinom. Stoga

možemo uzeti koordinatni početak u centru mase sistema, gde je

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = 0,$$

i jednačine (1) će i dalje važiti.

Pomnožimo li (1) vektorski sa $\mathbf{r}_i \times$ i saberemo dobijenih n jednačina, svi članovi na desnoj strani se skraćuju, i dobijamo

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i = 0,$$

ili

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{h}, \quad (3)$$

gde je $\mathbf{h}$ konstantni vektor. Ovo je takozvani integral "površina."

Ravan kroz centar mase, upravna na $\mathbf{h}$, naziva se *invarijabilnom* ili *Laplaceovom ravni* sistema. Kada se ova analiza primenjuje rigorozno na fizički sistem treba biti oprezan. Integral ugaonog momenta je rezultat izolovanosti sistema, odnosno odsustva spoljašnjih sila i odražava činjenicu da je *ukupan* moment impulsa konstantan; on potiče od orbitalnih revolucija planeta i rotacija oko sopstvenih osa.

Ako su sva tela čvrsta, sferno-simetrična i međusobno izolovana, postojaće i invarijabilna ravan. U suprotnom, precesiona kretanja i efekti plinskog trenja doveste do razmene momenta impulsa, pa će se $\mathbf{h}$, kako je definisano u (3), menjati sa vremenom. Ipak, gornji uslovi su približno ispunjeni za naš planetarni sistem i u praksi možemo govoriti o invarijabilnoj ravni Sunčevog sistema: ona otprilike ima elemente $\Omega = 107^\circ$ i $i = 1^\circ 35'$, u odnosu na ravan ekliptike.

Dalje, može se definisati U , *funkcija sile* sistema, kao

$$U = \gamma \sum_{i < j}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (4)$$

gde se uzima tačno jedno ponavljanje svake od kombinacija masa m_i i m_j . Onda je komponentna sila određena sa

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \gamma m_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_{ij}} \right) \\ = -\gamma m_i \sum_{j=1}^n m_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^3}.$$

Odavde je moguće zapisati jednačinu (1) kao

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \nabla_i U, \quad (5)$$

gde je

$$\nabla_i = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y_i} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Pretpostavimo da želimo iznova organizovati naš sistem N tela. Počnimo sa m_1 na položaju $\mathbf{r}_1$. Pri premeštanju tela m_2 iz beskonačnosti do $\mathbf{r}_2$ vrši se rad

$$-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}}.$$

Ako se sada premesti m_3 na $\mathbf{r}_3$, dodatni rad iznosi

$$-\gamma \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - \gamma \frac{m_2 m_3}{r_{23}}.$$

Ponavljajući prethodni postupak, vidi se da $-U$ predstavlja ukupnu potencijalnu energiju sistema.

Pomožimo sada (5) skalarom sa $\dot{\mathbf{r}}_i$ i saberimo svih n jednačina:

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_i U \\ = \frac{dU}{dt}.$$

Integraljenjem ove relacije dobija se:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = U + const, \quad (6)$$

što je integral energije. Neka je T kinetička energija sistema. Tada je

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2,$$

i integral energije se može zapisati kao

$$C = T - U,$$

što predstavlja desetu konstantu integracije i kompletira analitička rešenja najopštijeg problema kretanja međusobno interagujućeg sistema N izolovanih tela koja je principijelno moguće dobiti.

Činjenica da je sistem N tela nerešiv, ipak ne daje odgovor na pitanje da li je dati sistem (a cilj je, pre svega, pronaći odgovor za Sunčev sistem) stabilan ili ne. Fundamentalni radovi Laplasa (Laplace) i Lagranža (Lagrange) dokazali su analitički da se planete kreću kvaziperiodično, do prvog reda po masama (u jednačinama kretanja), ekscentricnostima i nagibima planetских putanja², pa je glavni cilj nebeske mehanike 19. veka bio u konstruisanju kvaziperiodičnih rešenja za tela u Sunčevom sistemu pomoću računara poremećaja. Kasnije, Poanckare (Poincaré) pokazuje da pošto je moguće formalno prikazati rešenja planetarnih jednačina kretanja u obliku beskonačnih redova, tada ovi redovi u opštem slučaju nisu konvergentni. U drugoj polovini ovog veka, na osnovu **KAM**³ teoreme, je zaključeno da ako su poremećaji mali, odnosno mase, ekscentričnosti i inklinacije planeta dovoljno male⁴, onda veliki broj početnih uslova

²S obzirom na to da su odgovarajući odnosi masa planeta i Sunca reda veličine $\mu = \frac{m_i}{M_\odot} \sim 10^{-3}$ do 10^{-9} , a odgovarajuće ekscentričnosti i nagibi putanja (u radijanima) reda 10^{-2} , odgovarajući članovi u razvoju koji sadrže drugi i više stepene ovih veličina su zanemarljivi

³Kolmogorov-Arnol'd-Moser

⁴Pod "dovoljno malim" se podrazumeva da vrednosti odgovarajućih μ, e, i treba da budu svakako ispod 10^{-43} , što, evidentno, nema nikakav praktični značaj!

dovodi do kvaziperiodičnih rešenja. Sunčev sistem sasvim sigurno ne zadovoljava kriterijume ove teoreme. Ipak, naglo povećanje performansi računara, imalo je preponderantni uticaj na drugi, numerički, pristup problemu. Veliki broj obimnih simulacija dinamike Sunčevog sistema u poslednjih 10 godina samo je potvrdio njegovu haotičnost i gubitak prediktabilnosti već nakon 100 miliona godina⁵ (poremećaj reda veličine 10te značajne cifre početnih uslova doveo bi do 100% odstupanja nakon tog vremenskog perioda i rešenje bi izgubilo svoj fizički smisao). Naravno, to ne znači da će posle navedenog vremena doći do katastrofalnih događaja kao, na primer, presecanja orbita Zemlje i Venere, već da tradicionalne metode nebeske mehanike ne mogu tačno da predvide položaje i brzine tela Sunčevog sistema. Ipak, njegova velika starost (kao i starost i istorijski dosije planete Zemlje) decentno ukazuju na znatan nivo stabilnosti.

Pošto je, dakle, isuviše složeno manipulirati Sunčevim sistemom takvim kakav je, određene aproksimacije u numeričkom pristupu se moraju primeniti. To se najčešće svodi na kompromis između brzine izvršavanja programa i željene tačnosti. Stoga je vrlo važno izvorni problem teorijski uprostiti koliko god je to dopustivo.

Pretpostavimo da je, kao što je to slučaj sa Suncem u našem planetarnom sistemu, jedna masa, m_n , dominantna. Uzmimo koordinatni početak u centru m_n ; neka je vektor položaja tela m_i u novom sistemu $\mathbf{r}'_i$. Tada je

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_n.$$

Vrednosti r_{ij} se ovom transformacijom ne menjaaju, pa je $\partial/\partial x'_i = \partial/\partial x_i$, itd. Sada je

$$U = \gamma m_n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j}{r_{nj}} + \gamma \sum_{i < j} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (7)$$

⁵Ova procena je relativno paušalna, pošto različiti delovi Sunčevog sistema pokazuju drastične razlike u pitanju stabilnosti. (videti dalje u tekstu)

$$= \gamma m_n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j}{r_{nj}} + U'.$$

Dalje,

$$\nabla_i U = \nabla_i U' - \gamma m_n m_i \frac{\mathbf{r}'_i}{r_{in}^3}. (i \neq j)$$

Iz jednačine kretanja tela m_n se dobija:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}'_n &= -\gamma \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_j}{r_{nj}^3} \\ &= \gamma \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\mathbf{r}'_j}{r_{nj}^3}. \end{aligned}$$

Jednačina kretanja tela m_i glasi

$$\ddot{\mathbf{r}}'_i + \ddot{\mathbf{r}}'_n = \frac{1}{m_i} \nabla_i U$$

ili

$$\ddot{\mathbf{r}}'_i + \gamma \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\mathbf{r}'_i}{r_{nj}^3} = \frac{1}{m_i} (\nabla_i U' - \gamma m_n m_i \frac{\mathbf{r}'_i}{r_{in}^3}).$$

Prebacimo li iti član ispred sume, dobija se:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}'_i + \gamma m_i \frac{\mathbf{r}'_i}{r_{in}^3} + \gamma \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{\mathbf{r}'_i}{r_{nj}^3} &= \frac{1}{m_i} (\nabla_i U' - \\ &\quad \gamma m_n m_i \frac{\mathbf{r}'_i}{r_{in}^3}), \end{aligned}$$

ili, preimenovanjem promenljivih $\mathbf{r}'_i$ sa $\mathbf{r}_i$, što se sme uraditi pošto se sada u potpunosti nalazimo u novom referentnom sistemu,

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + \gamma (m_n + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{r_{in}^3} = \frac{1}{m_i} \nabla_i U' -$$

$$\gamma \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_{jn}^3}. \quad (7)$$

Neka je sada

$$R_{ij} = \gamma \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_{jn}^3} \right). \quad (8)$$

Onda je

$$m_j \nabla_i R_{ij} = \gamma \nabla_i \left(\frac{m_j}{r_{ij}} \right) - \gamma m_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_{jn}^3},$$

i

$$\sum_{j=1}^{n-1} m_j \nabla_i R_{ij} = \frac{\gamma}{m_i} \sum_{j=1}^{n-1} \nabla_i \left(\frac{m_i m_j}{r_{ij}} \right) - \gamma \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_{jn}^3} = \frac{1}{m_i} \nabla_i U' - \gamma \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\mathbf{r}_j}{r_{jn}^3}.$$

Kombinujući ovaj rezultat sa (7), dobijamo

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + \gamma(m_n + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{r_{in}^3} = \sum_{j=1}^{n-1} m_j \nabla_i R_{ij}. \quad (9)$$

Jednačine (9) su fundamentalne. Ako su R_{ij} jednaki nuli, sve se svodi na (prost) slučaj kretanja dva tela, pa su upravo R_{ij} članovi ”odgovorni” za sve poremećaje i razlike u odnosu na keplerovsko kretanje. Oni se zato i zovu *funkcijama poremećaja*.

Napomenimo samo da se jednačina (9) može napisati u sledećem obliku:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i + \gamma(m_n + m_i) \frac{\mathbf{r}_i}{r_{in}^3} = \gamma \sum_{j=1, j \neq i}^{n-1} m_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_{jn}^3} \right). \quad (10)$$

Prvi član na desnoj strani prethodne jednačine predstavlja *direktne* uticaje poremećajnih tela na telo m_i ; drugi član označava *indirektne* uticaje, koji se vrlo često (pogrešno) zanemariju, a predstavljaju uticaj velikih planeta na koordinatni početak.

U slučaju asteroida⁶ (u Sunčevom sistemu, jednačina (10) poprima sledeći oblik

$$\ddot{\mathbf{r}} + M \gamma \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \sum_{i=1}^9 m_i \gamma \left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \right), \quad (11)$$

⁶Pod ’asteroidom’ (sin. mala planeta) se podrazumeva planetoidno telo mali dimenzija, do oko 1000 km u prečniku

gde je M - masa Sunca, $\mathbf{r}$ -vektor položaja tela, a sumiranje se vrši po devet velikih planeta⁷ i povećanju njihovih srednjih udaljenosti od Sunca (koordinatni početak je uzet u centru Sunca), pri čemu $i = 1$ odgovara Merkuru itd.

Osim ako telo ne prolazi blizu neke planete, najveći doprinos desnoj strani jednačine (11) potiče od Jupitera, m_5 , dok su efekti ostalih planeta relativno mali. Ova aproksimacija proizilazi iz činjenice da je najveći broj asteroida skoncentrisan na lokaciji tzv. Glavnog asteroidnog pojasa, ilustrovanoj na slici 7, koji se proteže između orbita Marsa i Jupitera. U slučaju transneptunskih asteroida, najveći doprinos desnoj strani jednačine (11) potiče od Neptuna i tako dalje, u zavisnosti od konkretnog problema. Sledi da je u praksi i neophodno i moguće pojednostaviti (11), s tim što je svaki korak potrebno teorijski potkrepiti.

Uticaj Plutona se može sasvim zanemariti zbog njegove male mase (nekoliko redova veličine manje od mase velikih spoljašnjih planeta) i velike udaljenosti. Ovo nije slučaj kod Merkura gde se indirektni članovi u (11) ne mogu zanemariti; oni imaju oblik:

$$-m_1 \gamma \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3},$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{m_1}{M + m_1} \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_1,$$

gde je $\bar{\mathbf{r}}_1$ centar mase Sunca i Merkura. Odatle se (11) može napisati kao

$$\frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_1) + M \gamma \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \sum_{i=1}^8 m_i \gamma \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} - \sum_{i=2}^8 m_i \gamma \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3}. \quad (12)$$

⁷U ovom razmatranju Pluton je smatran jednom od velikih planeta.

U praktičnom radu često je vrlo pogodno zanemariti i sve četiri unutrašnje planete pošto su njihove direktne perturbacije male⁸, a indirektna se mogu apsorbovati baricentričnom popravkom, odnosno prelaskom u sistem sa koordinatnim početkom u centru mase Sunca i planeta Zemljinog tipa. Ako je ova tačka određena sa $\bar{\mathbf{r}}_4$, onda

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_4) + M\gamma \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \sum_{i=1}^8 m_i \gamma \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} - \sum_{i=5}^8 m_i \gamma \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3}. \quad (13)$$

Ako je telo dovoljno daleko od četiri unutrašnje planete za $r \gg r_i, i = 1, 2, 3, 4$, onda

$$\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} \sim \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Takodje, $\bar{\mathbf{r}}_4$ je uvek malo, manje od $5 \times 10^{-6} AJ$, pa se za veliko r može uzeti

$$\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_4 = \mathbf{r}'$$

i

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} \sim \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}.$$

Neka je

$$M_4 = M + \sum_{i=1}^4 m_i;$$

tada jednačina (11) glasi:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} + \gamma M_4 \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} = \sum_{i=5}^8 m_i \gamma \left(\frac{\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'|^3} - \frac{\mathbf{r}'_i}{r_i'^3} \right). \quad (14)$$

⁸Osim toga, uključivanje npr. Merkura u simulaciju bi zahtevalo upotrebu vrlo malog vremenskog koraka da bi se greška numeričke metode držala u granicama tolerancije, analogno važi i za sistem Zemlja-Mesec, itd.

Model Sunčevog sistema (koji je korišćen u ovom radu u okviru softverskog paketa *ORBIT9x*) zasniva se na gore pomenutoj analizi, odnosno uključuje direktne poremećaje svih velikih planeta, simultano izračunavajući njihove orbite zajedno sa orbitama probnih tela. Unutrašnje planete su izostavljene iz direktne integracije, ali je pri-
menjena baricentrična popravka na početne uslove, što, u principu, pokriva 90% indirektnih efekata (vidi Milani i Knežević, 1992). *ORBIT9x* koristi precizan multi-step integrator (za početne korake se koristi simplektički Runge-Kutta metod) i omogućava praćenje orbita tela u, pre svega, Sunčevom sistemu, u okviru različitih dinamičkih modela i dugih vremenskih intervala. Eksperimentalni uzorak za svrhu ovog rada uključuje 10 numerisanih, realnih, asteroida čiji su orbitalni elementi preuzeti od Minor Planet Centra i stoga se mogu smatrati preciznim (provereni astrometrijskim posmatranjima u vise opozicijama).

2 Izroci i ispitivanje haosa u kretanju asteroida

Danas se prilično pouzdano zna da su kretanja tela u planetarnim sistemima u osnovi haotična (preciznije, u Sunčevom sistemu: Laskar, 1989), dok su jedino dinamički mehanizmi koji do tog haosa dovode, kao i karakteristične vremenske skale i veličine rezultujućih makroskopskih nestabilnosti različite (Knežević, 1999). Haotično ponašanje se može prepoznati, recimo, pomuću dugotrajnih numeričkih integracija, u vremenskoj evoluciji velike poluose asteroida: kod stabilnog asteroida nema nikakvih naglih i "neočekivanih" skokova niti većih anomalija (sl.1), već grafik ima standardan oblik pravilnih kvaziperiodičnih oscilacija

(reda $10^{-4} AJ$); u slučaju haotičnog tela (sl.4), ovaj grafk se odlikuje (očekivanim) nepravilnostima, *random walk-om*, iznenadnim skokovima i velikim oscilacijama, privremenim zalivatima u rezonancu (ovde, na oko 1 milion godina ili, na slici 2 između 6 i 7 miliona godina) itd. Slike 1 – 4 pokazuju zavisnost promena velikih poltosa sa vremenom nekih asteroida iz uzorka koji je posmatran u ovom radu, počev od stabilnih (sl.1), preko srednje haotičnih (sl. 2,3), do izrazito haotičnih (sl.4). Podaci su filtrirani tako da su uklonjeni (iako ne besprekorno) poremećaji sa periodima između 40 i 4000 godina.

Prethodni postupak je u velikoj meri samo preliniraran i može poslužiti samo sticanju grube slike o ponašanju asteroida. Formalnije, kaos se obično opisuje i meri pomoću takozvanog *karakterističnog eksponenta Ljapunova* (u oznaci *LCE*) koji predstavlja meru divergencije dve, početno bliske orbite, u faznom prostoru orbitalnih elemenata:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta X(t)|}{|\delta X_0|}. \quad (15)$$

Karakteristično vreme Ljapunova (T_L) je veličina inverzna *LCE*-u, i često jednostavnija da se interpretira nego sâm eksponent Ljapunova. Vreme Ljapunova se može definisati kao vreme potrebno da bi se rastojanje između divergirajućih orbita uvećalo e puta:

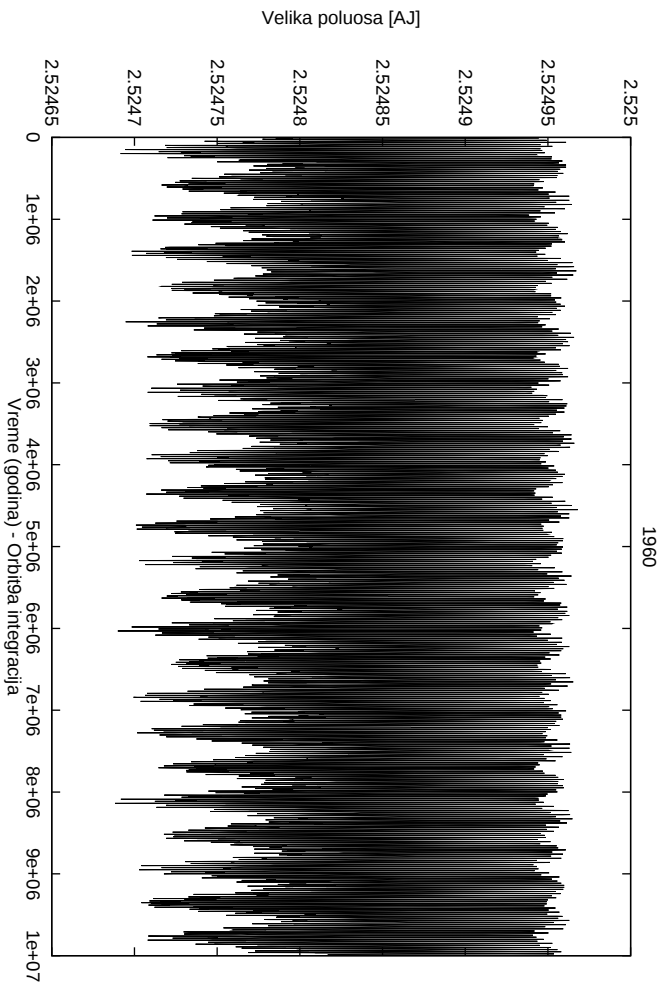
$$T_L = 1/\lambda.$$

Kod većine konzervativnih dinamičkih sistema, Njutnove jednačine imaju i regularna i haotična rešenja; za neke početne uslove, kretanje je kvaziperiodično, za druge je haotično. Upravo način na koji bliske trajektorije divergiraju odvajaju haotično ponašanje od kvaziperiodičnog. Za haotične trajektorije najveći Ljapunovljev eksponent je pozitivan; za kvaziperiodične trajektorije

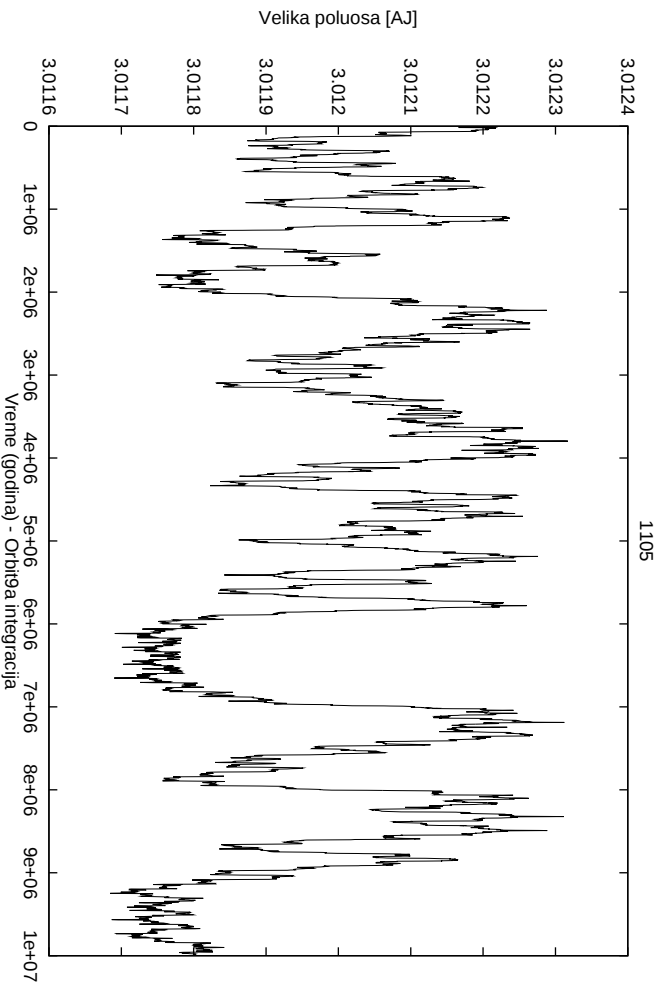
svi karakteristični eksponenti Ljapunova su jednaki nuli.

Stabilne orbite su one čije su varijacije orbitalnih elemenata pravilne a *LCE* mali (odnosno, odgovarajuće vreme Ljapunova (dugo). Dve inicijelno bliske stabilne orbite ostaju blizu jedna druge u faznom prostoru ili se razilaze vrlo sporo. Obično se uzima vrednost $T_L \sim 10^5$ godina za graničnu između haosa i stabilnosti, ali to je, na kraju, stvar konvencije. Na slikama 5 i 6 prikazane su vrednosti $\gamma(t)$ na primeru jednog stabilnog (1995) i jednog haotičnog (1670) asteroida. Razlika je očigledna: u slučaju haotičnog, γ raste gotovo linearno sa vremenom i, nakon 10 miliona godina, dostiže oko 830, što daje približnu vrednost za $T_L \sim 12000$ godina (što se, u principu, nalazi linearnim fitovanjem). Pošto je ova vrednost dobijena za konačan vremenski interval a T_L se definiše za $t \rightarrow \infty$, ona u stvarnosti može da varira za $\pm 20\%$. Oblik zavisnosti kod stabilnog asteroida (1995) ima sasvim drugačiji izgled, ne prati linearni trend a bliske orbite se praktično ne razilaze.

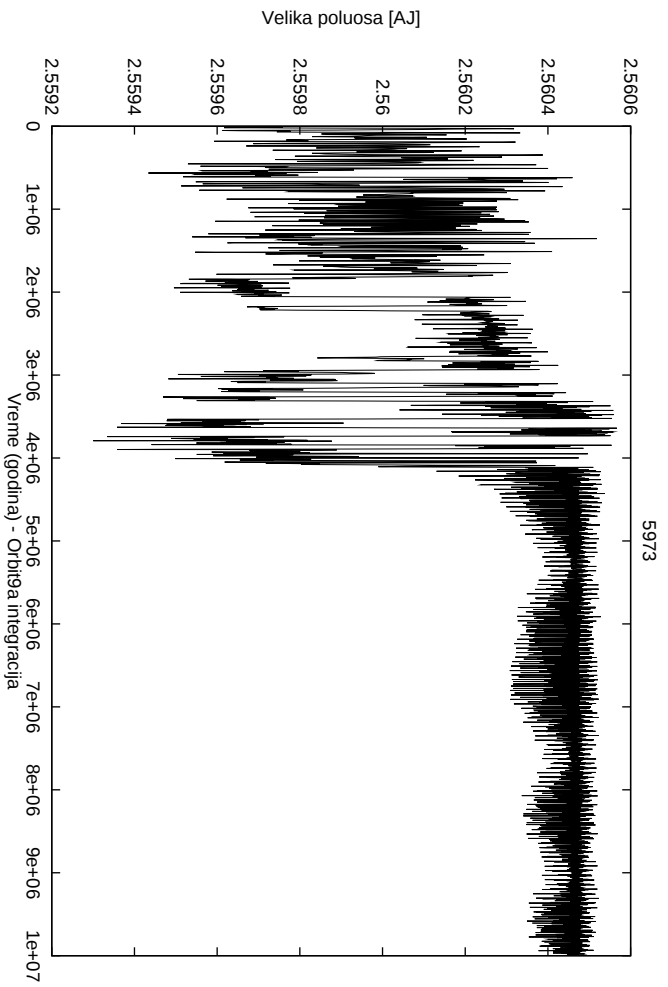
Treba napomenuti da asteroidi ne mogu biti "manje" haotični od poremećajnih velikih planeta, koje imaju vremena Ljapunova oko $\simeq 5$ miliona godina (Laskar, 1989), u slučaju spoljnih planeta nešto više (Nobili 1989). Primrdni kaos, koji je očigledno inherentan telima u Sunčevom sistemu, nije razmatran u ovom radu, već onaj koji potiče od ponašanja u rezonanci i od nepravilnosti u kretanju samog asteroida.



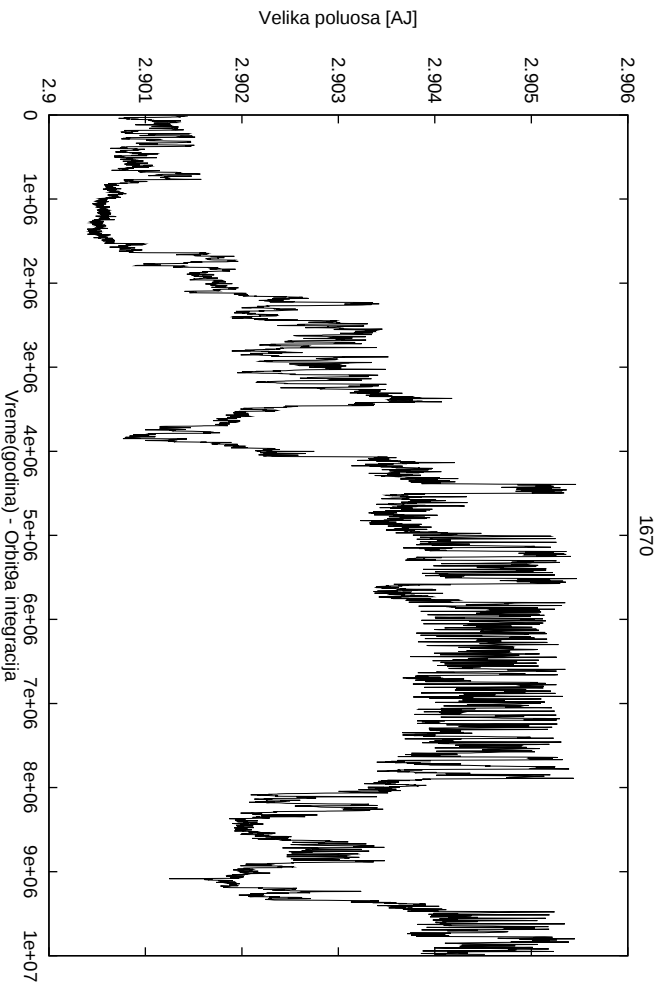
Slika 1: Grafič zavisnosti velike poluose asteroida 1960 od vremena



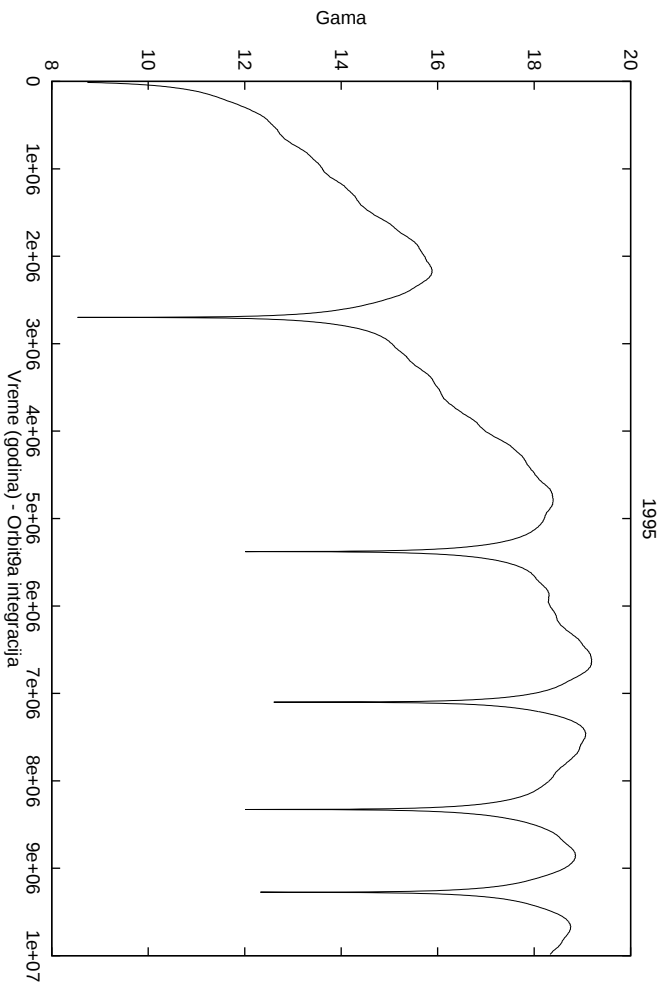
Slika 2: Grafič zavisnosti velike poluose asteroida 1105 od vremena



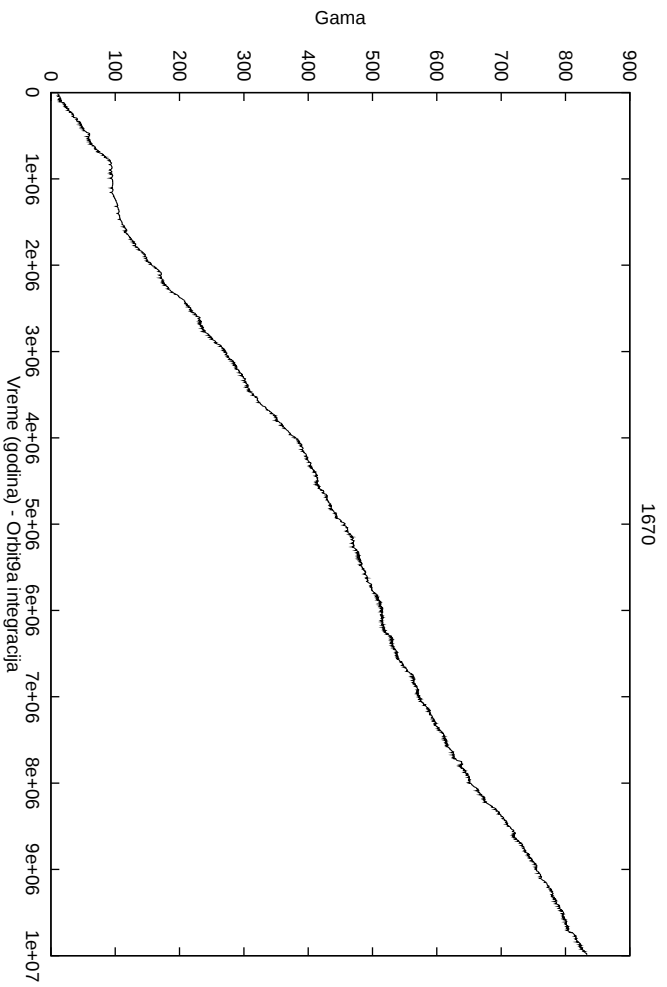
Slika 3: Grafič zavisnosti velike poluose asteroida 5973 od vremena



Slika 4: Grafič zavisnosti velike poluose asteroida 1670 od vremena



Slika 5: Grafik zavisnosti γ asteroida 1995 od vremena



Slika 6: Grafik zavisnosti γ asteroida 1670 od vremena

Nedavno je (v.[5]) ustanovljeno da haos ne mora obavezno da podrazumeva i makroskopsku nestabilnost. Naime, uočena je treća klasa orbita koje odlikuje kratko vreme Ljapunova (što bi ove objekte svrstalo među haotične), ali koji ne pokazuju nikakve značajnije varijacije sopstvenih elemenata (vidi kasnije) u toku vremenskih intervala koji višestruko premašuju odgovarajuća vremena Ljapunova; njihovi sopstveni elementi osciluju, ali pritom samo u okviru odredjenih, uskih, granica, te su ovi objekti nesumnjivo stabilni. Stoga je pomenuti fenomen i označen kao *stabilni haos*.

Ponašanje haotične orbite tokom dugih vremenskih intervala (nekoliko redova veličine dužih od vremena Ljapunova) prevashodno zavisi od prirode *rezonance* koja taj haos uzrokuje. Dublje objašnjenje samog pojma rezonance, kao i svih njenih fizičkih implikacija, prevazilazi i prostor i svrhu ovog rada, te će ovde biti data samo neka neophodna pojašnjenja.

Čak u dinamički najjednostavnijem sistemu od centralnog tela i samo dve planete, postoji 6 stepeni slobode, po 3 prostorna za svaku planetu. Tako, ono što se na prvi pogled čini samo kao sistem sa dve karakteristične frekvencije (frekvencije revolucija dveju planeta oko Sunca) je, u stvari, sistem sa 6 frekvencija. Dve od njih su očigledno one koje se odnose na revoluciju planeta oko Sunca; ostale 4 su mnogo sporije frekvencije precesije parametara *orijentacije* orbita. Postojanje i brzih i sporih stepeni slobode proizvodi raznovrsnost fenomena orbitalnih rezonanci.

Dva su tipa orbitalnih rezonanci. Intuitivno očigledniji, koji se označava prosto kao *orbitalna rezonanca* ili *rezonanca u srednjem kretanju*, nastaje usled (približne) samerljivosti orbitalnih perioda planeta ili satelita. Drugi tip, najčešće označavan kao *sekularna rezonanca*, se odnosi na

spore frekvencije precesije parametara orijentacije orbita. Primeri posmatračkih činjenica koje se objašnjavaju rezonantnim dejstvom obuhvataju pre svega *Kirkwoodove* (*Kirkwood*) *praznine* u asteroidnom pojasu između Marsa i Jupitera (to su deficiiti u broju asteroida na lokacijama koje grubo odgovaraju položajima rezonanci u srednjem kretanju nižeg reda sa Jupiterom), zatim prenos materijala iz Glavnog asteroidnog pojasa do Zemlje, formiranje planetarnih sistema (dinamika planetezimala, transport i reorganizacija planetezimala u protoplanete, interakcije protoplaneta i, konačno, čišćenje planetezimalnih ostataka iz interplanetarnog prostora), uopšte, dinamička stabilnost planetarnih sistema i, konačno, prsten meteoroidnih i čestica prašine koje se usled *Poynting-Robertsonovog efekta* spiravno kreću, zadržane u dugovečne orbitalne rezonance sa Zemljom. Prethodni primeri ukazuju na mehaničke rezonance, uzrokovane gravitacionim interakcijama; nasuprot njima, zračenje i elektromagnetne sile takođe mogu biti dobar izvor poremećaja i indukovati rezonantne efekte (*Lorencove* (*Lorentz*) *rezonance* u prstenu oko Jupitera).

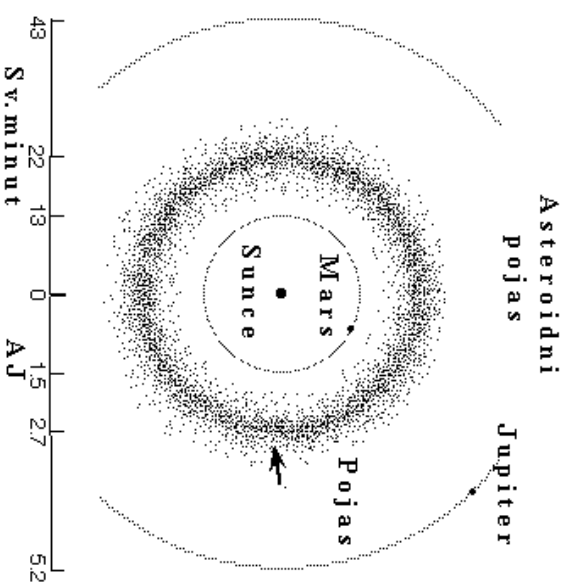
Ukratko, ukoliko je sekularna rezonanca dominantna u dinamičkoj evoluciji asteroida, nestabilnosti mogu biti velike i javiti se u toku vremenskog intervala reda veličine vremena Ljapunova, recimo $\simeq 10^4$ godina (videti dalje: asteroid 5973); ako se, pak, radi o rezonanci u srednjem kretanju i nižeg reda, makroskopski efekti (nestabilnosti) takođe mogu nastati za relativno kratko vreme, recimo $\simeq 10^6 - 10^7$ godina; ako je orbita u početnom trenutku "okružena" samo rezonancama višeg reda, orbita može biti haotična, ali nestabilnosti, ako do njih uopšte i dodje, mogu se javiti tek u toku vremenskih intervala nekoliko redova veličine dužih od vremena Ljapunova.

Zanimljiv je slučaj asteroida 5973, čija je

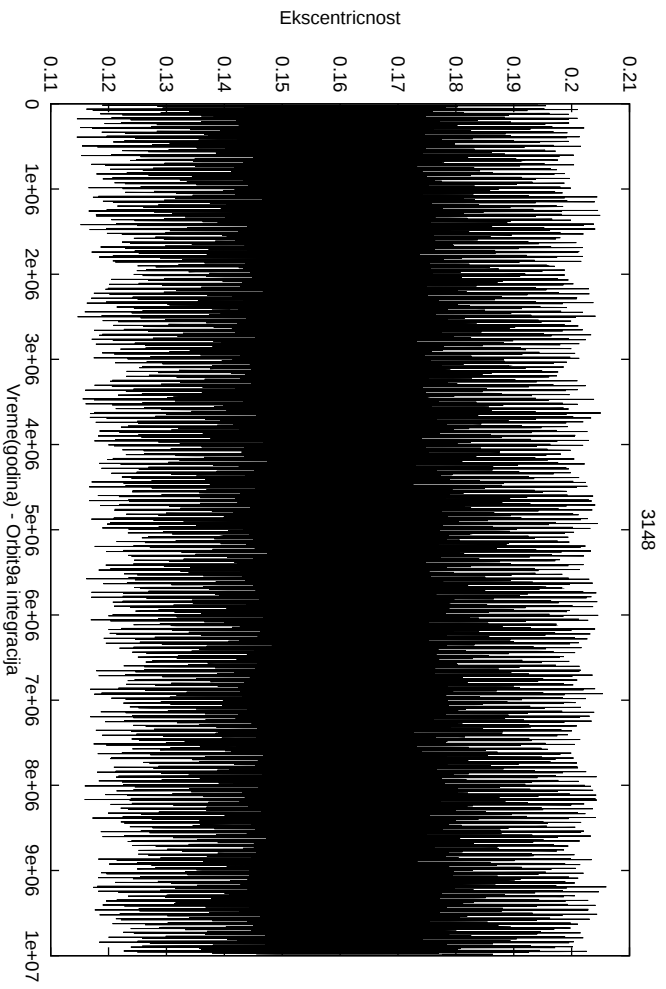
vremenska evolucija velike poluose data na grafiku 3. Naime, do trenutka od približno 4 miliona godina, dati asteroid se ponaša haotično i ispoljava, već spomenute, velike iregularnosti u kretanju, da bi se zatim vrlo naglo stabilizovao (promene vrednosti velike poluose putanje postaju reda 10^{-4} !). Iz mape rezonanci, koja je priložena u Milani i Knežević, 1994 (v. [4]), se vidi da se u okolini $2.564J$ preklapa nekoliko sekularnih rezonanci, što objašnjava karakteristično ponašanje ekscentričnosti putanje tokom vremena (sa 2 uočljiva moda), dato na slici 9 (uporediti sa ekscentričnošću "običnog" haotičnog asteroida, na slici 8). Ovo je dobar primer međusobne spregnutosti u ponašanju elemenata; različite haotične efekte moguće je nezavisno uočiti i potom tumačiti na osnovu, recimo, ponašanja velike poluose i ekscentričnosti. Pravi uzrok haosa kod asteroida 5973 mogao bi se utvrditi jedino produženom integracijom, pošto je kod nagiba datog asteroida prisutan izvestan trend, koji može biti ili posledica haotične difuzije ili prosto uzlazni deo neke verijacije koja je posledica uticaja sekularne rezonance, perioda dužeg od 10 miliona godina.

Poslednjih godina, dosta je pažnje posvećivano izradi odgovarajućih algoritama za računanje tzv. *sopstvenih elemenata* malih planeta. Najjednostavnije rečeno, sopstveni elementi su parametri koji opisuju određeni asteroid ali poseduju važnu osobinu relativne nepromenljivosti tokom vremena. Ova konstantnost se u praksi postiže njihovim "čišćenjem" od svih kratko- i dugo-periodičnih poremećaja. Naime, pošto je integrale jednačina kretanja nemoguće odrediti, sopstveni elementi bi u tom smislu predstavljali integrale nekog pojednostavljenog sistema diferencijalnih jednačina koje približno opisuju kretanje datog asteroida. Ukoliko je takve parametre moguće naći, onda se oni označavaju kao

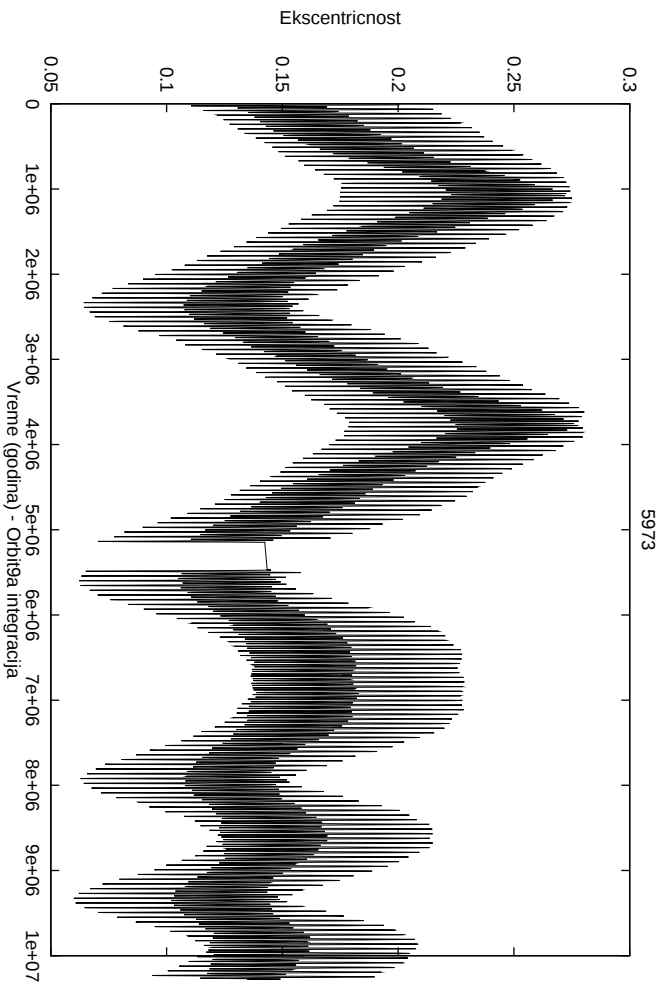
sopstvena velika polnosa (a), sopstvena ekscentričnost (e) i sopstveni nagib (dat u obliku svoje trigonometrijske funkcije $\sin I$). Najvažnija upotreba sopstvenih elemenata (za identifikaciju asteroidnih familija) data je u poglavlju (3). Danas se u teoriji sopstvenih elemenata teži, pre svega, specijalizaciji metoda za određene grupacije malih planeta ili subpopulacije u okviru asteroidnog pojasa, sa ciljem povećanja tačnosti (uz posledicu smanjenja opštosti). Tako postoji analitički model za asteroide malih i umerenih ekscentričnosti i nagiba (Milani, Knežević), semianalička teorija primenljiva na objekte visokih ekscentričnosti i nagiba (Lemaître, Morbidelli) ili, recimo, na tela u okolini sekularnih rezonanci (Morbidelli). Tačnost koju ovi modeli nude kreće se oko $10^{-3} - 10^{-4}$, u zavisnosti od modela i haotičnosti samog asteroida.



Slika 7: Pozicija Glavnog asteroidnog pojasa u Sunčevom sistemu



Slika 8: Grafik zavisnosti ekscentričnosti asteroida 3148 od vremena



Slika 9: Grafik zavisnosti ekscentričnosti asteroida 5973 od vremena

3 Neke primene haosa

Haos može biti korišćen kao časovnik, odnosno pokazatelj starosti asteroidnih familija. Familije su grupacije objekata nastalih u razornim sudarima od roditeljskog tela. Iako se, uz puno napora, veće familije mogu uočiti u faznom prostoru oskulatornih elemenata kao povećana koncentracija u blizini roditeljskog tela, već nakon nekoliko miliona godina grupacije ovog tipa se osipaju u tolikoj meri da je nemoguće izvršiti bilo kakvu pouzdanu identifikaciju. Već pomenuti sopstveni elementi se pokazuju kao mnogo pogodniji u tu svrhu zato što, po definiciji, predstavljaju invarijante kretanja. U stvarnosti, oni su samo približno nepromenljivi u vremenu, ali *haotična difuzija* koja se kod njih odigrava je dovoljno spora da se familije *ipak* mogu prepoznati i pouzdano odrediti i milijardu godina posle formiranja. Posle toje, međutim, asteroidi koji usled haotične difuzije "lutaju" faznim prostorom sopstvenih elemenata dovoljno brzo da, ukoliko su članovi familije, mogu da izadju iz oblasti koju zauzima njihov familija u tom faznom prostoru nakon određenog karakterističnog vremena koje je reda $10^6 - 10^9$ godina i manje od vremena života Sunčevog sistema. Karakteristično vreme, u ovom slučaju, može da posluži kao gornja granica za starost familije, što se može, svakako, koristiti samo u statističkom smislu, pošto je haotična difuzija po svojoj prirodi slučajan proces.

Metod "haotične hronologije" je nedavno primenjen na slučaj relativno male i prilično kompaktne familije *Veritas*, koja se nalazi u blizini nekoliko orbitalnih rezonanci višeg reda. Kretanje njena dva glavna člana, uključujući i najveće telo familije, 490 *Veritas*, je tipičan primer stabilnog haosa. Sopstveni elementi ova dva tela menjaju se zbog haotične difuzije, zbog čega napuštaju

granice familije za manje od 50 miliona godina⁹. Pošto je nezavisno sugerisano da se zaista radi o članovima iste familije¹⁰, sledilo bi da familija ne može biti starija od 50 miliona godina (ovome u prilog ide i velika sličnost u ponašanju oba objekta). Ipak, opširniji proračuni (Knežević) ukazuju na nepotpunost prethodno korišćenih modela, odnosno njihovu prevetliku uprošćenost, mada takodje procenjuju starost *Veritas* familije na ispod 100 miliona godina.

Asteroid 2953 *Vyshelevia*, veličine 15 km u prečniku i lociran na samoj ivici Kirkvudove praznine i 5 : 2 orbitalne rezonance, je takodje upotrebljen za analizu određenih aspekata sudarne evolucije malih planeta i ispitivanje velike porodice *Koronis*. Numeričkom integracijom njegove orbite, inače stabilno haotične, otkriveno je da ova postaje izuzetno nestabilna već posle 10 miliona godina. Asteroid biva zahvaćen u rezonancu i, nakon nekoliko bliskih prilaza Jupiteru, njegova orbita doživljava kvalitativnu transformaciju u hiperboličnu i on napušta Sunčev sistem (ovo je i inače najčešći ishod bliskih prilaza planetama koji su izvor snažnog haosa u aseroidnom kretanju). Pošto se ovde radi o haotičnoj orbiti, ovaj primer nije uzet kao autentična predikcija stvarne evolucije asteroida *Vyshelevia*, već su urađeni slični testovi za određen broj klonova, dobijenih malom promenom početnih uslova. Zajedno sa kasnije pronađenim, drugim, primerima sličnog ponašanja, ovi testovi su trenutno omogućili samo razne interpretacije naslantanke i kasnije dinamičke evolucije velike porodice *Koronis*.

U poslednje vreme mnogo pažnje se pridaje mogućnostima sudara asteroida sa Zemljom. Orbite objekata koji prese-

⁹Pod uslovom da familija nije znatno veća nego što se to danas smatra; u tom slučaju, karakteristično vreme bi bilo veće.

¹⁰Ustanovljeno na osnovu fizičkih karakteristika.

caju putanje planeta, uključujući $NEAe$ ¹¹ (asteroidi u blizini Zemlje) i komete, su snažno haotične zahvaljujući bliskim prilazima planetama. Iz paleonauka znamo da neki od njih zaista i udaraju u Zemlju. Današnje procene kažu da svega nekoliko njih veličine kilometra u prečniku udari u Zemlju u toku 1 milion godina; najveći deo tog broja čine upravo $NEAi$. Naravno, pretnju predstavljaju i oni asteroidi koji trenutno ne spadaju u klasu NEA , ali koji tokom svoje orbitalne evolucije počnu da presecaju putanju Zemlje. Rabinowitz *et al.* zaključuje da postoji ne više od oko 1000 $NEAa$ većih od 1km u prečniku, za čije bi otkrivanje, po sadašnjem tempu, bilo potrebno još oko 20 godina.

O načinu na koji mala tela iz različitih delova Sunčevog sistema stižu do Zemlje dugo su postojale samo ideje i pretpostavke, da bi se tek početkom 80tih godina ovog veka došlo do prvih kvantitativnih rezultata (Williams razmatra uticaj sekularnih rezonanci, Wisdom pokazuje da materijal može dospeti do Zemlje pomoću haotičnih efekata u 3 : 1 rezonanci). Neki od problema koji su i danas prisutni kod ovih modela su zanemarivanje uloge međunasteroidnih sudara ili fizikih osobina asteroida i meteorita. Sudari oslobađaju materijal iz roditeljskih tela u Glavnom pojasu i kontinualno ga usitnjavaju. Tokom nekog katastrofičnog događaja, formiranja kratera na većim asteroidima ili orbitalne difuzije (usled zračenja i sličnih efekata), materijal može dospeti u rezonancu. Čak i nakon što počnu da presecaju putanje planeta, mnoga tela i dalje provode jedan deo revolucije u asteroidnom pojasu, izloženi daljim sudarima. Jedno vreme se verovalo da rezonance nižeg reda, poput one 3 : 1, imaju najveći uticaj na mala tela i da upravo one produkuju $NEAe$. Ipak, novija

istraživanja ukazuju na to da su ove rezonance možda i *previše* snažne da bi proizvele $NEAe$ ili meteorite (većina asteroida u ovim simulacijama je bila ili privučena od strane Sunca ili napustila Sunčev sistem). Brojne slabe rezonance i interakcije među rezonancama koje proizvode haotične efekte čine se mnogo verovatnijim uzrokom nastanka $NEAa$, dovoljno jakim (i, s druge strane, dovoljno osetljivim) mehanizmom koji je u stanju da poveća ekscentricnosti asteroida u pojasu dovoljno da bi oni poceli da presecaju putanju Marsa. Kao posledica bliskih susreta sa Marsom, oni bivaju izbačeni iz rezonanci u koje su bili zahvaćeni i polako evoluiraju, sve dok ne dodju u blizinu Zemlje kroz nekih desetak miliona godina (ovu evoluciju prate i pospešuju serije slabijih rezonanci kroz koje asteroid kaskadno prolazi). Ovaj scenario, ipak, treba prihvatiti sa rezervom, pošto je od nedavno izložen raznim kritikama i preispitivanjima. Asteroid 433 *Eros* jedan je od malih tela koja danas ne presecaju Zemljinu putanju, ali je zato izložen čestim susretima sa Marsom, što podstiče njegovo haotično ponašanje (na slici 10 se može videti nepravilan, izrazito izdužen oblik koji svedoči o burnoj kolizionoj evoluciji). Ima 22 km u prečniku i duplo je veći od objekta koji je načinio Chicxulub krater pre 65 miliona godina i, najverovatnije, izazvao izumiranje nekih živih vrsta. Sličan postupak praćenja klonova *Erosa* je korišćen i došlo se do zaključka da postoji verovatnoća od oko 5% da on počne da preseca putanju Zemlje i udari u nju nekad u budućnosti.

¹¹Near-Earth Asteroids



Slika 10: Asteroid 433 *Eros*, snimljen pomoću *NEAR* sonde, 13. februara 2000. godine

4 Zaključak

Vremenska integracija 10 asteroida koja ja data u ovom pregledu a urađena na desktop računaru, relativno je uspešna, u smislu da je autoru pružila potreban osećaj o tome na koji način se više današnja istraživanja u dinamici planetarnih sistema, kao i ideju o brojnim poteškoćama koje se sa ovom i sličnim metodama mogu javiti, počev od samog numeričkog aparata i kontrole greške, do obrade finalnih rezultata. Treba napomenuti da pristup problemu koji sam ovde sledio nije i jedini mogući (danas se za integraciju orbita, pre svega u kvalitativnim simulacijama, u hamiltonijanskim sistemima sa dominantnom centralnom masom koriste i tzv. *simplektičko mapiranje*, koje je drugačije osmišljeno). Dobijeni rezultati su u dobroj saglasnosti sa očekivanjima.

Što se tiče potencijalno opasnih asteroida, informacije koje su predstavljene u poglavlju 3 treba shvatiti krajnje uslovno; one se menjaju usled poboljšanja računara i

tehnike, što dovodi do neprestanog priliva novih podataka i ostavlja mnoga pitanja otvorenim. Tako je, recimo, broj potencijalno opasnih asteroida gotovo prepolovljen u novijim studijama u odnosu na one od pre nekoliko godina; istovremeno, sada znamo i za neke druge regione stabilnosti u Sunčevom sistemu koji mogu služiti kao rezervoar sličnih objekata (neki delovi unutrašnjeg Sunčevog sistema, pojas između Urana i Neptuna, itd.)

Posebnu zahvalnost dugujem Zoranu Kneževiću za hardversku i softversku ispomoc, kao i čisto ljudsku pažnju, razumevanje i beskrajno strpljenje. Takođe, mojoj profesoric, Nataši Čaluković, koja mi je dala pravo znanje i podstakla pravu ljubav prema fizici.

Literatura

- [1] Danby, J.M.A.: Fundamentals of Celestial Mechanics, 2nd edition, 1988, Richmond: Willman-Bell
- [2] Laskar, J.: A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar system, *Nature*, vol.338
- [3] Knežević, Z.: Chaos in the motion of asteroids, 1999
- [4] Knežević, Z.: Proper elements of minor planets, Publ. Obs. Astron. Belgrade No. 48(1995), 7 – 30
- [5] Milani, A., Nobili, A.M., Knežević, Z.: Stable chaos in the asteroid belt, 1997, *Icarus* 125, 13 – 31
- [6] Rabinowitz, D., Helin, E., Lawrence, K., Pravdo, S.: *Nature* 403, 165 – 166
- [7] Applied Physics Laboratory, Johns Hopkins University, *NEAR* Mission Status, <http://near.jhuapl.edu>